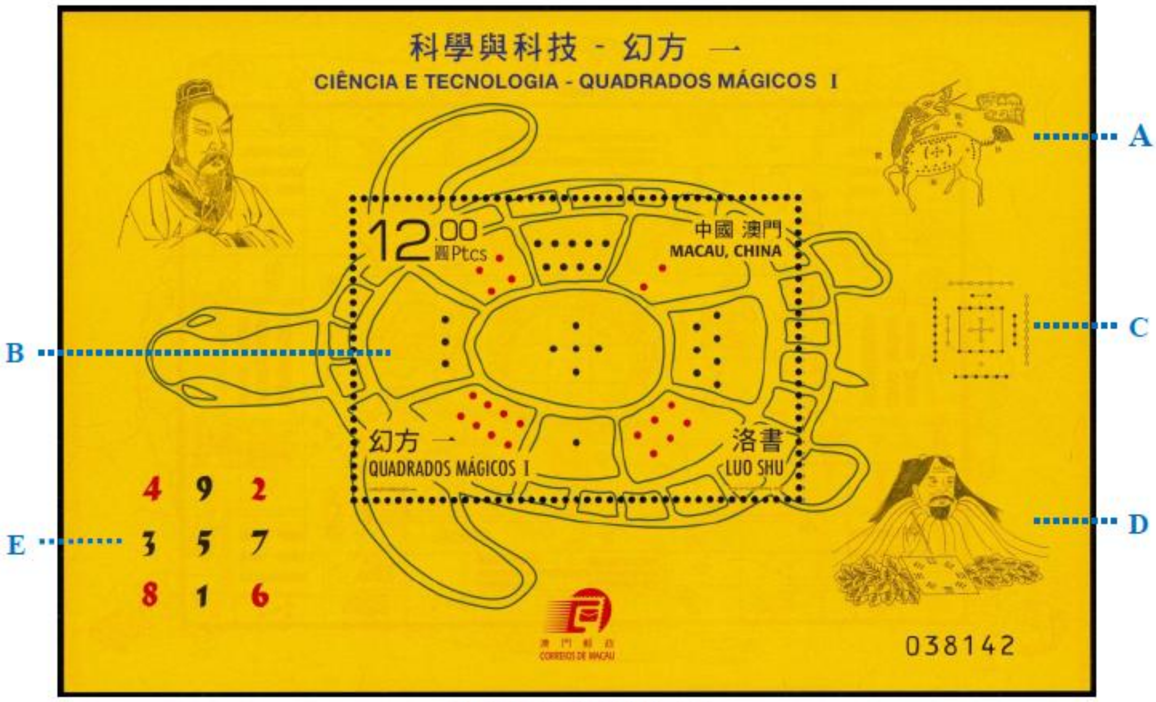
Magische Quadrate aus Macau

Dieter Egelriede
Mitglied der Arbeitsgemeinschaft Technik und Naturwissenschaften

Macau hat 2014 unter dem Titel *Quadrados Mágicos I* einen Block und einen Kleinbogen herausgegeben, deren Darstellungen von magischen Quadraten in einem erweiterten Sinn hier ein wenig erläutert werden sollen.(1)

Der Block enthält zwei Zeichnungen, die an die ältesten Dokumente chinesischer Mathematik erinnern sollen. Es handelt sich dabei um zwei Diagramme, die dem Kaiser Yü dem Großen von einem Drachenpferd (**A**) aus dem Gelben Fluss und von einer Schildkröte (**B**) aus dem Fluss Lo übergeben sein sollen. Dieser Kaiser soll im 3. Jahrtausend v. Chr. China aus der Sintflut errettet haben. Diese Legende ist wohl vor dem 5. Jh. v. Chr. entstanden - wobei die Literatur auch andere Zeitdaten enthält. Die heute bekannten bildlichen Darstellungen gehen auf das 2. Jh. v .Chr. zurück.



Block *Quadrados Mágicos* [1]

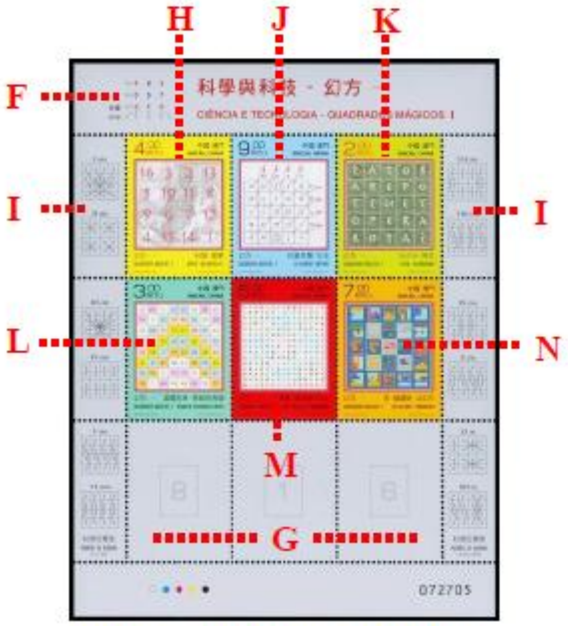
7
2
8 3 5 4 9
1
6

Ho T´u – Diagramm in Zahldarstellung [2]

Das erste Diagramm (**C** Ho T´u-Diagramm) weist die Markierungen vom Drachenpferd auf und hat die Eigenschaft, dass jeweils die Summe der ersten geraden Zahlen kleiner 10 (dargestellt mit gefüllten Kreisen) einerseits und andererseits die Summe der ungeraden Zahlen kleiner 10 (ungefüllte Kreise) – um die (nicht mitaddierte) 5 angeordnet - jeweils 20 ist.

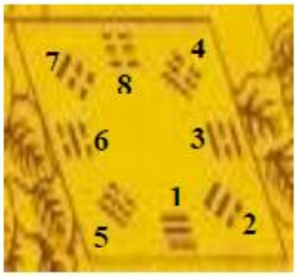
Das Lo Shu-Diagramm (**B**) besteht aus einer Anordnung von neun Schildfeldern einer Schildkröte, in welche die Zahlen von 1 bis 9 in Punktdarstellung (ungerade Zahlen schwarz, gerade Zahlen rot) eingetragen sind. Betrachtet man dieses Diagramm in der üblichen Zahldarstellung (**E**), so findet man, dass die Summe der Zahlen in einer Zeile, in einer Spalte als auch in den beiden Diagonalen jeweils 15 ist.(**F**) Es handelt sich um ein sog. *magisches Quadrat*. Dieses magische Quadrat wird auch im Kleinbogen [Abb.4] von den Wertstufen der sechs Marken und den drei beschrifteten Zierfeldern (**G**) dargestellt.

F Lo Shu-Quadrat [3]



Kleinbogen *Quadrados Mágicos* [4]

Allgemein geht es bei einem magischen Quadrat darum, die Zahlen 1, 2, 3, …, n^2 so in ein quadratisches Schema zu schreiben, das die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonale die gleiche Zahl (*magische Zahl*) ist. Mathematisch bewiesen ist, dass es für jede natürliche Zahl größer 2 mindestens ein *n* x *n* - Quadrat gibt.



D Die acht Trigramme [5]

Der bedeutende Herr am unteren rechten Rand des Blocks (**D**) verwendet die acht *Trigramme* zur Weissagung, welche die Grundlage des altchinesischen *Ging* (Buch der Wandlungen) bilden. Diese Orakelzeichen werden aus drei durchgezogenen oder einmal unterbrochenen Linien gebildet, womit sich genau $2^3 = 8$ Möglichkeiten ergeben. Die Trigramme lassen sich wie andere Symbole der chinesischen Numerologie mit einer Vielfalt von Bedeutungen interpretieren, wie z.B. mit Natur, Familie oder Wesensart. So bilden z.B. die in Abb. 5 mit Zahlen versehenen, aus dem Block stammenden Trigramme gerade ein Schema, bei dem die Summe der beiden Zeilen und Spalten als auch der beiden Diagonalen jeweils 9 ist.

Flagge von Südkorea [6]

Übrigens enthält die Flagge Südkoreas die vier symmetrischen Trigramme 1, 3, 6 und 8, deren symbolische Bedeutung sind z.B. Himmel, Wasser, Feuer, Erde.

H Dürer-Quadrat [7]

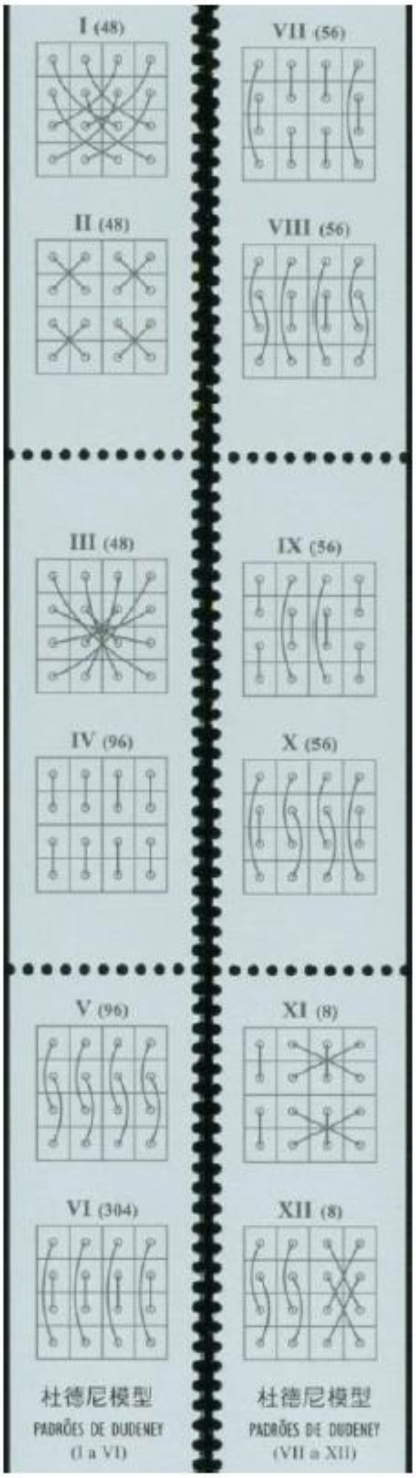
Die erste Marke des Kleinbogens (**H**) zeigt das berühmte *Dürer-Quadrat* vor einem Ausschnitt vom Meisterstich *Melencolia I* des Künstlers, der auch andere Symbole der Mathematik enthält (2). Bei diesem magischen Quadrat vierter Ordnung (4x4) ist nicht nur die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen 34, sondern auch die Summe der Zahlen in jedem der vier Eckquadranten, der vier Ecken und der vier Zentrumsfelder.

Auch die Summe der Zahlen in den vier einander gegenüberliegenden mittigen Randfeldern ist jeweils 34 (5+9+8+12 bzw. 3+2+15+14). Ebenfalls erhält man z.B. diese magische Zahl 34, wenn man die vier Zahlen in den um ein oder zwei im Uhrzeigersinn weiterversetzten Eckfelder addiert (8+14+9+3 bzw. 12+15+5+2) oder wenn man die Summen der in Form eines Drachenvierecks angeordneten Zahlen bildet (z.B. 2+10+14+8 oder 3+9+15+7).

A. Dürer: Melencolia I [8]

Übrigens findet man in der letzten Zeile des Dürerquadrats auch Hinweise auf das Werk und den Künstler selbst: In der Mitte findet man das Jahr, in dem Dürer den Stich anfertigte: 1514. Sein Monogramm AD kann man in der „4“ und „1“ finden - ist doch A der erste und D der vierte Buchstabe des Alphabets.

Das Dürer-Quadrat ist eines von 880 magischen Quadraten 4. Ordnung.(3) Henry Ernest Dudeney (1857-1930), ein englischer Lehrer und Puzzleerfinder, hat diese je nach Aussehen und Entstehung in zwölf Gruppen eingeteilt, was auf dem Rand des Kleinbogens mit der Angabe der jeweiligen Anzahl der magischen Quadrate zu finden ist [Abb.9]. In einem 4x4-Quadrat ist Summe der Zahlen 1+2+3+…+16 = 136. Jeweils werden vier Zahlen addiert. Also ist die mittlere Summe gleich 136:4 = 34. Allgemein ergibt sich die magische Zahl für ein Quadrat n-ter Ordnung aus $(1+2+3+\ldots+n^2):n = ½\cdot n\cdot(n^2+1)$. Für $n=3$ ist somit die magische Zahl $½\cdot 3\cdot(9+1) = 15$, was wir oben für das Lo Shu-Quadrat schon feststellen konnten.



I Einteilung der 880 magischen 4x4-Quadrate nach H.E. Dudeney [9]

J De la Loubère-Methode [10]

Auf der zweiten Marke des Kleinbogens (J) wird anhand eines magischen Quadrats der Ordnung 5 (magische Zahl 65 bei 275305224 verschiedenen Quadraten) dargestellt, wie man einfach mit der *de la Loubère-Methode* magische Quadrate ungerader Ordnung konstruieren kann. Simon de la Loubère (1642-1729) war ein französischer Diplomat in Siam (Thailand), der auch mit Gottfried Leibniz befreundet war.

Zunächst wird eine arithmetische Folge gewählt, z.B. hier die Folge 1, 2, 3, …, 25. Die Methode geht von einem leeren Quadratschema aus und benutzt dann folgendes Regelwerk:

1. Startfeld mit der 1 ist das Mittelfeld der obersten Zeile.
2. Die Felder werden diagonal fortlaufend nach rechts oben nummeriert.
3. Gelangt man an einen Rand des Quadrates, so wird dort fortgesetzt, wo sich ein gleiches Quadratschema darüber bzw. daneben anschließen würde. (Zyklisch geschlossenes Quadratschema)
4. Wenn ein bereits belegtes Feld oder das rechte obere Eckfeld erreicht werden, wird die Nummerierung in dem Feld fortgesetzt, was sich senkrecht darunter befindet.

In Abb.11 wird versucht, die Entstehung des in der Kleinbogenmarke abgebildeten magischen Quadrats in sechs getrennten Schritten zu verdeutlichen.

1. Schritt

		1		

2. Schritt

		1		
				3
			2	

3. Schritt

		1		
	5			
4				
				3
			2	

4. Schritt

		1	8	
	5	7		
4	6			
				3
			2	

5. Schritt

		1	8	15
	5	7	14	
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

6. Schritt

17	24	1	8	15
24	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

De la Loubère-Methode in sechs Schritten [11]

Dieses Verfahren für die Erstellung eines 3x3-Quadrats kann man selbst ausprobieren (4).

K Sator-Quadrat [12]

Das *Sator-Quadrat* (**K**) ist ein Satzpalindrom (5), das man in der Art eines magischen Buchstabenquadrats der Ordnung 5 horizontal und vertikal, vorwärts und rückwärts lesen kann. Gewöhnlich liest man das Sator-Quadrat zeilenweise von oben nach unten SATOR AREPO TENET OPERAS ROTAS, was im wörtlichen Sinn *„Der Sämann Arepo hält durch seine Mühe die Räder“* heißen kann. Eine freie Übersetzung (bei Vertauschung der Folge der Wörter) führt z.B. zu „Der Schöpfer lenkt verborgen die Räder der Welt.“

Dieses Quadrat existiert seit Jahrhunderten in deutschen, lateinischen, griechischen und koptischen Schreibungen. Die frühesten überlieferten Beispiele (z.T. auch spiegelbildlich angeordnet) stammen aus dem ersten Jahrhundert. Man findet das Sator-Quadrat in lateinischen Handschriften, in Stein gehauen oder inHolz geschnitzt an kirchlichen und weltlichen Bauwerken, z.B. inPompeji, in Manchester, im Petersdom und am Dom zu Siena.

Jahrhunderte lang galt das Sator-Quadrat als zauberkräftiges Zeichen gegen Pest, Hunger, Feuer und Dämonen.

Seit längerer Zeit versucht man, auch eine tiefere Bedeutung der einzelnen Buchstaben herauszufinden, da dahinter ein Sinn vermutet wird. Dabei geht es insbesondere um die eigenartige Anordnung der Buchstaben. Auch ist das Sator-Quadrat auch Gegenstand der Zahlenmystik.

L Franklin-Quadrat [13]

Benjamin Franklin (1706-1790), einer der Gründerväter der USA, hatte viele Interessen und wurde insbesondere als Politiker, Schriftsteller und Naturwissenschaftler bekannt. Er zeigte aber auch ein besonderes Interesse an magischen Quadraten. Das bekannteste von ihm befindet sich auf der weiteren Marke des Kleinbogens (**L**), das vorher schon angedeutet auf einer der amerikanischen Marken zu seinem 300. Geburtstag abgebildet wurde.

[Abb.14] In diesem Quadrat 8. Ordnung haben alle Zeilen und Spalten die Summe 260 [= ½·8·(82+1)] – nicht jedoch die Diagonalen wie bei gewöhnlichen magischen Quadraten. Dafür ist 260 aber z.B. auch als Summe von Zahlen zu finden, die in gewissen „gebrochenen Diagonalen“ zueinander stehen. Einige davon sind auf der Marke farblich markiert.

B. Franklin als Wissenschaftler [14]

Es existiert aber eine Vielzahl dieser „gebrochenen Diagonalen“ und symmetrisch angeordneten Plätze des Franklin-Quadrats, bei denen sich die Summe zu 260 ergibt. Abb.15 zeigt weitere solche Beispiele.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Weitere Beispiele, bei denen man die magische Zahl 260 im Franklin-Quadrat findet [15]

M Su Hui Palindrom (Ausschnitt) [16]

Die weitere Marke des Kleinbogens (**M**) zeigt den Mittelteil des *Su Hui Palindroms* [Abb.17]. Das gesamte Palindrom ist ein Gedicht aus 841 Zeichen, das die Form eines 29x29-Zeichenraster hat und vorwärts oder rückwärts gelesen werden kann, horizontal, vertikal oder diagonal, als auch innerhalb der farblichen Markierungen.

Su Hui Palindrom [17]

Das Gedicht mit dem Titel „Xuanji Tu“ kann wegen der Anordnung der Zeichen auf 2848 verschiedene weisen gelesen werden. Su Hui, eine chinesische Dichterin des 4. Jahrhunderts, webte ihr Palindrom mit fünffarbigen Seidenfäden. Sie schickte es an Ihren Ehemann, der in einer anderen Stadt an einer anderen Frau Gefallen gefunden hatte, mit dem Ergebnis, dass dieser zu ihr zurückkehrte.

N Geometrisches magisches Quadrat von L. Sallows [18]

Der britischer Elektroniker und Freizeitmathematiker Lee Sallows (geb. 1944), hat eine neue Art von magischen Quadraten erfunden. Bei einem solchen *geometrischen magischen Quadrat* („geometric square“) werden statt Zahlen geometrische Objekte in einem Quadrat angeordnet. Diese Objekte werden nun in jeder Zeile, Spalte und Diagonale so zusammengesteckt, dass eine identische Form als Zielform erzeugt wird. Mathematisch ist diese Problemstellung bisher kaum bearbeitet worden.

Die letzte Marke des Kleinbogens (**N**) zeigt ein spezielles Beispiel eines solchen geometrischen magischen Quadrats. Ausgegangen wird dabei von einem mittigen 3x3-Quadrat, was neun geometrische Grundfiguren **A** bis **I** enthält (siehe Abb.18 und 19), die wiederum aus jeweils fünf kleinen Quadraten gleicher Farbe gebildet werden. Sallows konnte nun 16 verschiedene (kleinere) 4x4-Quadrate mit einem „Loch“ als Zielform mit je drei der neun Grundfiguren bilden, die dann das Ausgangsquadrat in der Markendarstellung umrahmen.

ACG	AEI	BFG	CDH	ACI
AFH	A	B	C	ABC
DBI	D	E	F	DEF
CEG	G	H	I	GHI
AGI	ADG	BEH	CFI	GCI

Erklärung des geometrischen Quadrats von L. Sallows [19]

Mit Abb.19 soll versucht werden, diese 16 verschiedenen Lösungen der Zielform mit den neun Grundformen **A** bis **I** in einer nichtgeometrischen Weise zu erhellen.

Bemerkungen

(1) Die Postverwaltung von Macau hat eine weitere Ausgabe zu diesem Thema zum Jahresende 2015 angekündigt.
(2) Dieses Werk fand auch Verwendung für den Block 60 von Aitataki.
(3) Jedes magische Quadrat liefert sofort weitere magische Quadrate, indem man das Quadrat um 90^0, 180^0 bzw. 270^0 dreht oder indem man es an einer der vier Symmetrieachsen des Quadrats spiegelt. Diese acht symmetrischen Lagen unterscheidet man aber i.Allg. nicht, so dass es z.B. genau ein magisches Quadrat der Ordnung 3 gibt - das Lo Shu-Quadrat.
(4) Man gelangt zu der Darstellung des Lo Shu-Quadrat in Abb.3, wenn man dort die erste Zeile mit der dritten vertauscht.
(5) Ein Palindrom ist eine Zeichenkette, die von vorn und von hinten gelesen dasselbe ergibt.
Beispiel für ein Wort- bzw. ein Satz-Palindrom: RENTNER, LEONIE BEWEGT GEWEBE IN OEL.
Palindrome spielen eine besondere Rolle in der theoretischen Informatik.

Abbildungen

[1] Macau Bl. 229 (114%); [2], [11], [15], [19] Diagramme des Autors; [3], [5], [9 (164%)] Ausschnitte Macau KB 1924-29;
[4] Macau KB 1924-29 (41%); [6] Südkorea 1737; [7], [10], [12], [13], [16], [18] Macau 1924-29 (je 151%);
[8] Mongolei Bl.56 (57%); [14] USA 4066; [17] Wikipedia