Erinnerung an Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Dieter Egelriede
Mitglied der Arbeitsgemeinschaft Technik und Naturwissenschaften

Joseph Louis Lagrange wird 1736 mit dem Namen Guiseppe Lodovico Lagrangia in Turin in eine vermögende Familie geboren. Eine für ihn von seinem Vater geplante Karriere als Anwalt platzt nach dessen ruinösen Spekulationsgeschäften.

Joseph Louis Lagrange [1]

An der Turiner Artillerieschule zeigt Lagrange am Anfang auch keine große Begeisterung für Mathematik.
Die Geometrie des antiken Griechenlands empfindet er sogar als langweilig.

Erst nach seiner Beschäftigung mit einer Arbeit von E. Halley über die Anwendung der Algebra in der Optik, die sich mit seiner Begeisterung für physikali-sche Probleme verbindet, konzentriert er sich auf die Mathematik. Dies bezeichnet er für sich als ein Glück, denn später sagt er:

„Wenn ich reich gewesen wäre, hätte ich mich wahrscheinlich nicht der Mathematik gewidmet.“

Seine mathematischen Kenntnisse erlernt Lagrange autodidaktisch, da es eine fachliche Unterstützung in Turin nicht gibt. In Briefen an L. Euler in Berlin entwickelt er wichtige neue Ideen z.B. über die Zykloide und wird damit zu einem Mitbegründer der Variationsrechnung.

L. Euler [2]

J.B. d´Alembert [3]

19-jährig wird er 1755 Professor an der königlichen Artillerieschule in Turin, wo er seine Ideen weiter ausbaut, die vom Variationsproblem direkt zu der *Euler-Lagrange-Differentialgleichung* führen (1).

Euler erkennt den Wert der Lagrangeschen Ideen und empfiehlt das junge Mathematiktalent gemeinsam mit J.B. d´Alembert (der Lagrange während dessen Paris-Aufenthalts hatte schät-zen g-lernt) sofort dem Direktor der Berliner Akademie der Wi-senschaften, P.-L. Maupertuis. Die ihm 1756 angebotene Stelle in Preußen lehnt Lagrange aus Schüchternheit ab – wohl aber auch wegen der dominierenden Stellung Eulers. Er wird aber korrespondierendes Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

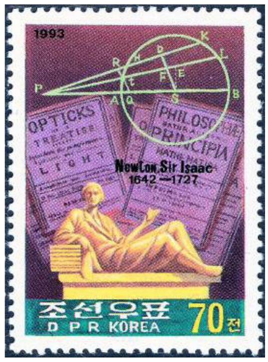
Als Euler nach Petersburg zurückkehrt und Friedrich II. an Lagrange schmeichelnd schreibt *„der größte König Europas bittet den größten Mathematiker Europas an seine Hof“*, folgt er 1766 diesem Ruf und verpflichtet sich als Leiter der mathematischen Klasse, der Berliner Akademie jeden Monat eine neue Arbeit vorzulegen – eine ungeheure Verpflichtung, die er während der folgenden zwanzig Jahre (bis auf Krankheitszeiten) getreulich erfüllt.

Friedrich II. [5]

Bedeutende Mathematiker, die in Berlin gewirkt haben: J.L. Lagrange mit L. Euler, C.G. Jacobi und K. Weierstraß [6]

Damit wird Lagrange zu einem der Mathematiker, die mit ihren Leistungen großen wissenschaftlichen Glanz auch auf Berlin bis heute ausstrahlen, was in den beiden abgebildeten und nicht berücksichtigten Markenentwürfen zum internationalen Mathematiker-Kongress in Berlin 1998 auch zum Ausdruck kommt.

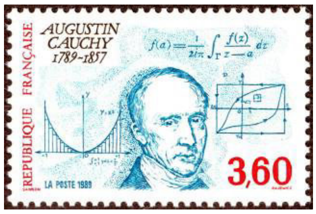
In Berlin entsteht Lagranges Meisterwerk *Mécanique Analytique*. Er wendet in diesem Buch, was aber erst 1788 - hundert Jahre nach dem Newtons *Principia* - erscheint, die neu entwi-ckelten Möglichkeiten der Analysis auf die Mechanik der Punkte und der starren Körper an. Lagrange verarbeitet die Resultate von Euler, d´Alembert und anderen Mathematikern des 18. Jahrhunderts und entwickelt diese von einem einheitlichen Standpunkt aus.



Er vereinheitlicht die verschiedenen Prinzipien der Statik und Dynamik – in der Statik durch die Verwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, in der Dynamik durch die Verwendung des *d´Alembertschen Prinzips* (2).

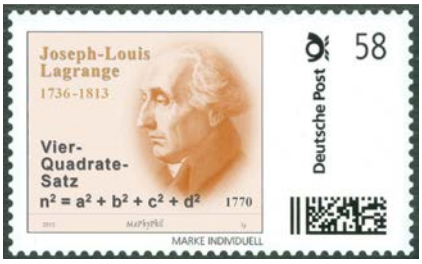
Zu den *i* Ortskoordinaten q_i fügt er *i* Geschwindigkeitskoordinaten hinzu und erhält die Lagrangesche Bewegungsgleichung mit den Kraftkomponenten Q_i. Im Vorwort der *Mécanique Analytique* betont er *„In diesem Werk findet man keine Figuren, sondern nur algebraische Operationen*.“ Das kennzeichnet Lagrange als den ersten reinen Analytiker. Die Mechanik ist für ihn ein Teil der Mathematik.

Lagrange versucht die Analysis zu „algebraisieren“ und ihr somit eine sichere Grundlage zu geben. Er lehnt die Theorie der Grenzwerte ab, wie sie von Newton angedeutet und von d´Alembert formuliert wurden. Für ihn enthält die Theorie der Reihenentwicklung die wahren Prinzipien der Differential- und Integralrechnung, *„ …befreit von jeder Betrachtung unendlich kleiner Größen, der Verschwindenden und Fluxionen, und zurückgeführt auf die algebraische Analysis unendlicher Größen“* – wie er später im Untertitel zu seiner *Théorie des fonctions analytiques* angibt, die 1797 erscheint. Selbst die Schreibweise *f´* an Stelle von $\frac{dy}{dx}$ stammt von Lagrange, um den Verdacht zu vermeiden, es handele sich bei der Ableitung um einen tat-sächlichen Quotienten von zwei unendlich kleinen Größen. Er geht davon aus, dass jede Funktion sich in eine Taylorsche Reihe entwickeln lässt, beachtet aber nicht ihre Konvergenz, führt jedoch eine Restglieddarstellung an, die heute zum Kern des sog. *Taylorschen Satzes* gehört. Wenn auch das Vorgehen von Lagrange letztlich nicht ziel-führend war, da auch bei ihm Grenzwertbetrachtungen unumgänglich werden, so hat dennoch diese Arbeit eine starke befruchtende Wirkung ausgelöst.



A. Cauchy findet später Ansatzpunkte zur Überwindung der bestehenden Unzulänglichkeiten bei der Grundlegung der Analysis und auch K. Weierstraß greift später den Grundgedanken von Lagrange auf, als er die durch Reihendarstellung definierbaren Funktionen in den Mittelpunkt der Analysis stellt.

In seiner umfangreichen Arbeit *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* behan-delt Lagrange die fundamentale Frage, warum die Methoden zur Lösung der Gleichungen bis zum vierten Grade nicht für Gleichungen höheren Grades erfolgreich sein können. Dabei haben seine Überlegungen auch zur Entdeckung der Gruppentheorie beigetragen, was sich auch in dem nach ihm benannten Satz dieses mathematischen Zweiges widerspiegelt (3).



Nicht zuletzt verdankt die Zahlentheorie Lagrange deutliche Fortschritte.

So beweist er den Vier-Quadra-te-Satz: *„Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchs-tens vier Quadratzahlen darstel-len.“*

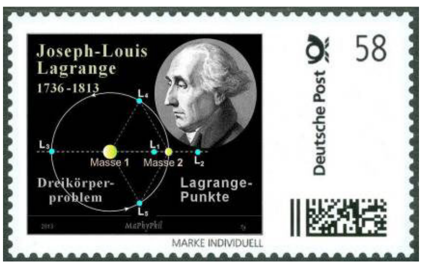
Beispiel: $319 = 15^2 + 9^2 + 3^2 + 2^2$.

Auch weist er nach, dass die von P. de Fermat in einem Gelehrtenstreit aufgestellte Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, worin D eine positive nichtquadratische ganze Zahl ist, stets in ganzen Zahlen lösbar ist.

1773 beweist Lagrange den Satz von Wilson: *Eine natürliche Zahl p ist genau dann eine Primzahl, wenn (p-1)! + 1 durch p teilbar ist*. Dabei bezeichnet (p-1)! die Fakultät, also das Produkt 1 · 2 · 3 · … · (p-1).

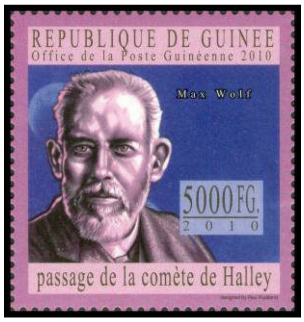
Fast die Hälfte der wissenschaftlichen Arbeiten von Lagrange befasst sich mit der Bewegung der Himmelskörper, so mit der Bahn des Mondes und des Jupiters, mit der Parallaxe der Sonne, mit der Passage der Venus vor der Sonnenscheibe und mit der Berechnung der Sonnenfinsternisse, was ihm zweimal den Preis der Pariser Akademie der Wissenschaften einbringt.

Insbesondere arbeitet er am Drei-Körper-Problem. Lagrange beweist, dass das im Allgemeinen analytisch nicht lösbare Dreikörperproblem für einige Spezialfälle doch analytisch lösbar ist: Bei zwei um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisende Körper gibt es für einen dritten Körper, der im Verhältnis zu den anderen beiden eine verschwindend kleine Masse besitzt, fünf Gleich-gewichtspunkte (Librations-Punkte) in der Himmelsmechanik.



In diesen sog. Lagrange-Punkten L1 bis L5 heben sich die Anziehungskräfte der beiden großen Körper und die Zentripetal-kraft ihrer Bewegungen gegenseitig auf, es herrscht echte Schwerelosigkeit. Gerät der dritte (masseärmere) Körper an einen solchen Punkt, wird er von den beiden großen Körper gleichartig angezogen und verbleibt wo er ist.

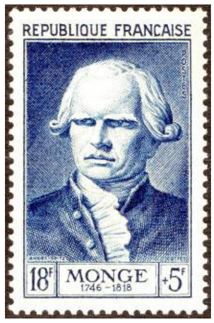
Die Lagrange-Punkte werden für die Positionierung von Satelliten genutzt, da dort ihre Lage nicht ständig korrigiert werden muss. Bei L1 befinden sich Sonnenbeobachtungs-satelliten wie z.B. der Weltraumsatellit SOHO.



L2 ist gut für die Weltraumteleskopie geeignet, da man dort vor der starken Son-neneinstrahlung geschützt ist, wie z.B. die WMAP-Raumsonde (Explorer 80), die von hier aus die kosmische Hintergrundstrahlung von 2001 bis 2010 un-tersucht hat. Natürlich haben auch andere Planeten Lagrange-Punkte, wie z.B. der Jupiter, der in seinen Lagrange-Punkten L4 und L5 zahlreiche Kleinkörper (Trojaner) besitzt. 1906 fand M. Wolf den ersten Trojaner des Jupiters (*Achilles*).

Als 1786 Friedrich II. stirbt, wird Lagrange von seiner Heimatstadt Turin sehr umworben. Er nimmt aber ein Angebot von Ludwig XVI. gern an, das ihm auch die Entbindung von einer Lehrtätigkeit verspricht, und geht 1787 nach Paris, wo er bis zu seinem Lebensende Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften wird.

Der Französischen Revolution steht er zunächst zurückhaltend gegenüber, übernimmt aber 1790 z.B. Aufgaben in dem von der Revolutionsregierung eingesetzten *Ausschuss der Akademie für die Standardisierung von Gewichts-und Längeneinheiten*, jenes Gremium, das unser heutiges metrisches System und das Dezimalsystem mit dem Anspruch *„A tous les temps, a toutes les peuples*“ (Für alle Zeit, für alle Völker) einführte. Der Ausschuss ist später die einzige akademische Einrichtung in Paris, die weiterarbeiten darf als der Terror der Revolution auch die Akademie erreicht und diese 1793 geschlossen werden muss. Lagrange hat nun das große Glück, den Vorsitz des Ausschusses zu über-nehmen, während anderen Mathematikern der Erhalt einer festen Stelle verwehrt bleibt, wie z.B. G. Monge.



Als alle Ausländer aus Frankreich verbannt werden, kann Lagrange mit einer Ausnahmegenehmigung und der Hilfe von A.L. de Lavoisier jedoch im Lande bleiben und überlebt im Gegensatz zu diesem und manchem anderen Wissenschaftler die Terror-herrschaft der Französischen Revolution.

Ab 1795 muss Lagrange für eine Zeitlang an der für die Aus-bildung von Lehrern gerade gegründeten *École normale supérieure* unterrichten und tritt in das neu gegründete *Institut de France* ein. Ab 1797 lehrt er als erster Professor für Analysis an der *École polytechnique*

.

Als Auszeichnung für seine großen Verdienste für die französische Wissenschaft wird Lagrange von Napoleon I. in die Ehrenlegion aufgenommen und 1808 zum Grafen und Senator von Frankreich ernannt. 1813 wird er mit dem *Grand Croix* des *Ordre Impérial de la Réunion* ausgezeichnet und stirbt kurz danach.

Lagrange wird im Pantheon in Paris beigesetzt. P.-S. Laplace würdigt dabei den großen Mathematiker und Astronom mit den Worten:

„Unter denjenigen, die am wirksamsten die Grenzen unserer Wissenschaft erweitert haben, besaßen Newton und Lagrange im höchsten Maße jene glückliche Kunst, die allgemeinen Prinzipien zu entdecken, welche das eigentliche Wesen der Wissenschaft ausmachen.“

Die folgende Seite zeigt Besonderheiten der zu Anfang abgebildeten Marke.

---

(1) In der Variationsrechnung wird versucht, einen Weg, Kurve oder Oberfläche usw. zu finden, für die eine bestimmte Funktion einen festen Wert hat - bei physikalischen Problemen ist das i.d.R. ein Minimum oder Maximum. Mathematisch geht es darum, feste Werte von Integralen der Form $I = \int_a^b f(y, \dot{y}, x)\,dx$ zu finden.
I hat einen festen Wert, wenn die Euler-Lagrange Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$ erfüllt ist.

(2) Das d’Alembertsche Prinzip der klassischen Mechanik erlaubt die Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems mit Zwangsbedingungen. Das Prinzip beruht auf dem Satz, dass die Zwangskräfte bzw. -momente keine virtuelle Arbeit leisten.

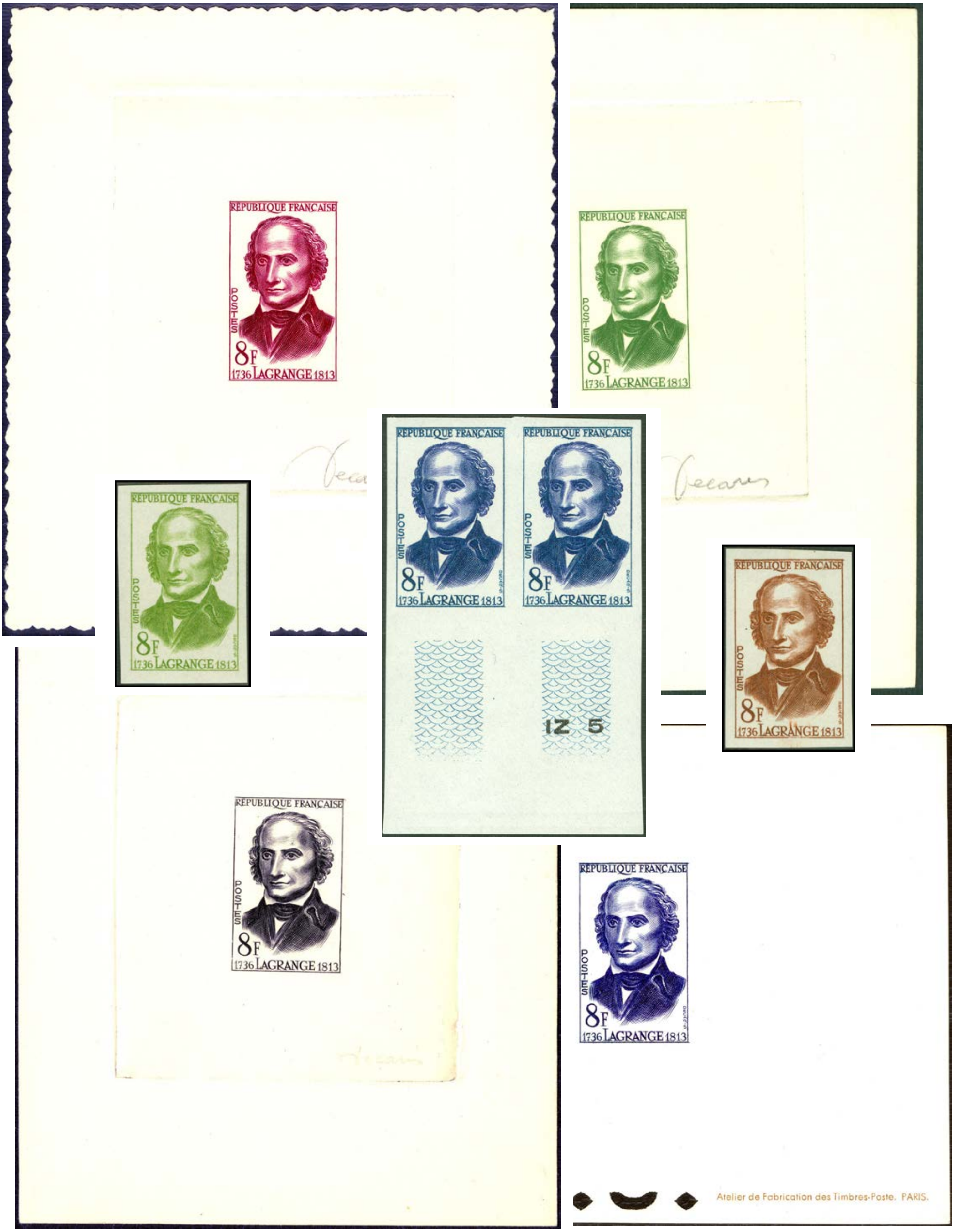
(3) Der Satz von Lagrange besagt, dass die Mächtigkeit jeder Untergruppe einer endlichen Gruppe deren Mächtigkeit teilt.

Literatur:

- T. Sonar: 3000 Jahre Analysis (Springer 2011)
- D.J. Struik: Abriß der Geschichte der Mathematik (Deutscher Verlag der Wissenschaften (1980)
- H. Wußing: 6000 Jahre Mathematik (Springer2009)
- H. Wußing, W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker (Aulius 1985)
- Wikipedia

Abbildungen:

[1] Frankreich 1182, Ausschnitt MeF SSt; [2] DDR 575; [3] Frankreich 1253, Ausschnitt Künstlerentwurf lila;
[4] Finnland 1002; [5] Bundesrepublik 2906; [6] Konkurrenzentwürfe zu Bundesrepublik 2005;
[7], [10], [12], [23] Individuelle Marken der Deutschen Post; [8] Korea-Nord 3487; [9] Frankreich 2747;
[11] Frankreich 3559; [13] Guinea 5067; [14] Guinea 7606; [15] Frankreich 1548, Farbprobe grün-braun;
[16] Frankreich 1024, Farbprobe orange; [17] Frankreich 968; [18] Frankreich 595; [19] Foto des Autors;
[20] Frankreich 3052; [21] Frankreich 997; [22] Frankreich 914]; [24] Frankreich 4213; [25] Frankreich 1057, Ausschnitt


RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
POSTES
8F
1736 LAGRANGE 1813
IZ 5
Atelier de Fabrication des Timbres-Poste. PARIS.